Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada de Matematică
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
11 Martie 2006

CLASA A IX-A – SOLUŢII şi BAREM ORIENTATIV

Problema 1. Fie x, y, z numere reale strict pozitive. Să se demonstreze inegalitatea

$$\sum \frac{1}{x^2+yz} \leq \frac{1}{2}\sum \frac{1}{xy}.$$

Soluţie. Din $x^2+yz \geq 2\sqrt{x^2yz}$ (inegalitatea mediilor), rezultă $\dfrac{1}{x^2+yz} \leq \dfrac{1}{2x\sqrt{yz}} = \dfrac{\sqrt{yz}}{2xyz}$ .... 4 puncte

Deci $\displaystyle\sum \frac{1}{x^2+yz} \leq \frac{1}{2xyz}\sum \sqrt{yz}$ dar $\sum \sqrt{yz} \leq \sum \frac{y+z}{2} = \sum x$ (inegalitatea mediilor) .... 2 puncte.

Prin tranzitivitate ultimele două relaţii probează inegalitatea din enunţ.

Cazul de egalitate se obţine pentru egalităţi în majorările făcute mai sus, ceea ce conduce la $x = y = z$. .... 1 punct

Observaţie. Inegalitatea se poate demonstra şi prin ”spargere”, arătând că

$$\frac{1}{x^2+yz} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}\right)$$

şi însumând.

Problema 2. Căsuţele unei table 9×9 se completează cu numere distincte de la 1 la 81. Să se arate că există $k \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$ astfel încât produsul elementelor de pe linia k este diferit de produsul elementelor de pe coloana k.

Soluţie.

Observaţie: Pentru considerarea de numere prime “mari” între 1 şi 81 .... 2 puncte.

Să presupunem că pentru orice $i \in \{1, 2, ..., 9\}$, produsul elementelor de pe linia i este egal cu produsul elementelor de pe coloana i a tabloului. Între 40 şi 81 sunt exact 10 numere prime şi anume 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79. Vom arăta că toate acestea se află (într-o anumită ordine) pe diagonala principală a tabloului. Într-adevăr, dacă $40 < p < 81$ este un număr prim, atunci acesta este singurul multiplu de p din căsuţele tabloului. Dacă p se află pe linia i, folosind presupunearea făcută rezultă că acesta se va afla şi în coloana i, deci pe poziţia (i, i) a tabloului, adică pe diagonala principală.

Atunci pe diagonala principală trebuie să avem cele zece numere prime, contradicţie, căci avem numai 9 poziţii. .... 5 puncte

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex, M mijlocul lui AB, N mijlocul lui BC, E intersecţia segmentelor AN cu BD şi F intersecţia segmentelor DM cu AC. Arătaţi că dacă $BE = \frac{1}{3}BD$ şi $AF = \frac{1}{3}AC$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Soluţie. Notăm $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}, \overrightarrow{CD} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ cu $a, b \in \mathbb{R}$. Rezultă $\overrightarrow{AD} = (a+1)\overrightarrow{u} + (b+1)\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$ .... 1 punct

Cum $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BE}$, obţinem $\overrightarrow{AE} = \frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{3} = \frac{a+3}{3}\overrightarrow{u} + \frac{b+1}{3}\overrightarrow{v}$

.... 2 puncte

Cum $\overrightarrow{AE}$ şi $\overrightarrow{AN}$ sunt coliniari, obţinem $a - 2b + 1 = 0$

.... 1 punct

În mod similar, exprimând vectorii $\overrightarrow{DF}$ şi $\overrightarrow{DM}$ obţinem $2a+b+2 = 0$

.... 2 puncte

de unde rezultă $a = -1, b = 0$, adică $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, aşadar $ABCD$ este paralelogram................................1 punct.

Problema 4. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, notăm cu $p(n)$ cel mai mare număr prim mai mic sau egal cu n şi cu $q(n)$ cel mai mic număr prim mai mare strict ca n. Să se arate că

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p(k)q(k)} < \frac{1}{2}.$$

Soluţie. Să notăm cu $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_m < \cdots$ şirul numerelor prime. Pentru $p_i \leq k < p_{i+1} - 1$ avem $p(k) = p_i, q(k) = p_{i+1}$

.... 2 puncte

Fie atunci $p_m = q(n)$. Avem

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{p(k)q(k)} \leq \sum_{k=2}^{p_m-1} \frac{1}{p(k)q(k)} = \text{.......... 1 punct}$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=p_i}^{p_{i+1}-1} \frac{1}{p(k)q(k)} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{p_{i+1} - p_i}{p_i p_{i+1}} = \text{.......... 3 puncte}$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_{i+1}} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{p_m} < \frac{1}{2} \text{ .... 1 punct}$$